Se trovo matrici tali che

$[A, B] = C$ come per l'algebra astratta

$[a, b] = c$ nello spazio astratto L delle trasformazioni

ho trovato una rappresentazione dell'algebra.

$$h_\alpha, \ e_{\pm\alpha} \longmapsto \text{matrici } H_\alpha, \ E_{\pm\alpha}$$

le matrici operano in uno spazio V di cui prendo

una base $\phi^{i=1\ldots n}$ t.c.

$$H_i \phi_a = \lambda_{i,a} \phi_a$$

Se prendo una generica combinazione di osservabili di

Cartan $H = \sum_i c_i H_i$

$$H \phi_a = \overbrace{\sum_i c_i \lambda_{i,a}}^{\text{autovalore}} \phi_a$$

l'autovalore è una funzione di c_i quindi di quale h in H $=: M_a(h)\,\phi_a$

$$h = \sum_i c_i h_i$$

↳ M_a sono i pesi e vivono in H^*, come le radici

I pesi sono una famiglia perché dipendono da su quale vettore di base uno li applica. Danno gli autovalori degli stati sotto applicazioni di osservabili mutualmente commutanti.

I pesi sono combinazioni lineari di radici

$$T_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(\phi_i)_j = \delta_{ij} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i=1 \quad \frac{b}{3} - \frac{1}{2}a = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{3} = M_1$$

$$(aT_z + bY)\,\Phi_i = \begin{cases} i=2 \quad \frac{b}{3} + \frac{1}{2}a = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 = M_2 \\ i=3 \quad \frac{2}{3}b = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2 = M_3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = a \qquad h_{\alpha_1} = \frac{1}{3}t_z \qquad M_3 = -M_1 - M_2$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}a + b \qquad h_{\alpha_2} = -\frac{1}{6}t_z + \frac{1}{4}Y$$

Dato un vettore di stato Φ_a di peso M_a possono costruire tutto spazio di Φ come abbiamo fatto per $SU(2)$ con $T_\pm$, applicato su $|j,m\rangle$

$$E_\alpha \phi^a = M^a \phi^a$$

segue

$$H E_\alpha \phi^a = \left(E_\alpha H + [H, E_\alpha]\right)\phi_a$$

$$= M_a E_\alpha \phi_a + \alpha E_\alpha \phi_a$$

$$= (M_a + \alpha)\, E_\alpha \phi_a$$

dunque $E_\alpha \phi_a$ ha peso $M_a + \alpha$

Sarebbe a dire E_α aumenta il peso di una unità di α

Ci sono un M_* massimo peso e una stringa di possibili pesi $M_*, M_* - \alpha, M_* - 2\alpha, \dots, M_* - q\alpha$

Per trovare q di questa rappresentazione facciamo lo stesso che per SU(2) $\phi_j \propto (E_\alpha)^j \phi_0$

$$E_\alpha \phi_k =: \tau_k \phi_{k+1} \quad (\text{def. di } \tau_k)$$

$$\phi_{k+1} = E_{-\alpha} \phi_{k+2} \quad (\text{def di } E_{-\alpha})$$

$$E_\alpha \phi_k = \tau_k \phi_{k+1} =$$

$$= E_\alpha \overbrace{E_{-\alpha} \phi_{k+1}}^{\phi_k} =$$

$$= \Big\{ E_{-\alpha} E_{\alpha} + \underbrace{[E_{\alpha}, E_{-\alpha}]}_{H_{\alpha}} \Big\} \Psi_{k+1}$$

$$= \tau_{k+1} \phi_{k+1} + \overbrace{M^{k+1}}^{M^* - \alpha(k+1)} \phi_{k+1}$$

$$= \Big\{ \tau_{k+1} + \underbrace{M^*(h_\alpha)}_{(h_{M^*},\, h_\alpha) = \langle M^*, \alpha \rangle} - (k+1)\underbrace{\alpha(h_\alpha)}_{(h_\alpha,\, h_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle} \Big\} \phi_{k+1}$$

$$h_{M^*} = \sum c_i h_{\alpha_i}$$

$$= \Big\{ \tau_{k+1} + \langle M^*, \alpha \rangle - (k+1) \langle \alpha, \alpha \rangle \Big\} \phi_{k+1}$$

$$\begin{cases} -\Delta\tau = \tau_k - \tau_{k+1} = \langle M^*, \alpha \rangle - (k+1) \langle \alpha, \alpha \rangle \\ \tau_0 = 0 \end{cases}$$

soluzione

$$\to \; -\tau_k = k \langle M^*, \alpha \rangle - \frac{1}{2} k(k+1) \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$$\underbrace{E_\alpha E_{-\alpha}}_{0} \phi_q = \tau_{q-1} \phi_q = 0$$

$$\tau_{q-1} = 0 = \langle M^*, \alpha \rangle - \frac{1}{2} q \qquad q = \frac{2 \langle M^*, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

Se non conosco M^* ma so solo che ho un peso M posso sempre dire che M è un peso massimo dal quale posso scendere un certo numero di volte.

Se chiamo i pesi

$$M + p\alpha,\ M + (p-1)\alpha, \dots M, M - \alpha,\ M - m\alpha$$

ho che l'analisi appena fatta vale per

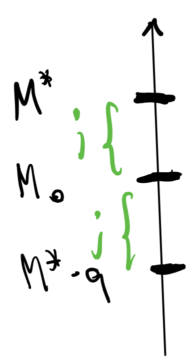
$$p+m = q = \frac{2\langle M+p\alpha, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} = \frac{2\langle M, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} + 2p$$

$$\Rightarrow \quad m-p = \frac{2\langle M, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}$$

Lo stringo di pesi esibisce una simmetria notevole: la riflessione di Weyl

Infatti deve esistere un M_0 t.c. $m-p=0$

e gli altri pesi sono ottenuti da questo aggiungendo (o togliendo) il peso α un certo numero di volte



$$M_0 = M_* - j = M_* - q + j$$

$$M = M^{\alpha} - j\alpha \longrightarrow M' = M^{\alpha} - q\alpha + j\alpha = M - q\alpha + 2j\alpha$$
$$= M - (q-2j)\alpha$$

$$q - 2j = \overbrace{m}^{q-j} - \overbrace{p}^{j} = \frac{2\langle M,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \alpha$$

cioè i pesi di una rappresentazione si devono vedere come vettori nello spazio delle radici che possiedono una simmetria di riflessione S_α

$$S_\alpha : \quad M \longmapsto M - 2\frac{\langle M,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$\phi^a_i = \delta_{aj}$ $\quad SU(3)$:

$$M_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$M_2 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$M_3 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2 = -M_1 - M_2$$